

Om vejning af kugler

Jonas Lindstrøm Jensen (mail@jonaslindstrom.dk)

Oktober 2009

1 Introduktion

En udbredt (og temmelig svær) gåde går ud på, at givet 12 kugler, hvor én af boldene ikke vejer det samme som de andre, og en vægt, skal du bestemme, hvilken af kuglerne det er, der ikke vejer det samme som de andre, og samtidigt bestemme om den er lettere eller tungere end de andre. Betingelsen er, at du kun må bruge 3 vejninger.

I denne artikel vil jeg forsøge at generalisere dette, og vil se på strategier at finde en kugle, der ikke vejer det samme som de andre, givet n kugler. Først vil jeg definere en *vejningsstrategi*, der er en generalisering af løsningen til problemet med 12 kugler, nemlig en komplet opskrift på, hvordan man kan finde den kugle, der ikke vejer det samme som de andre. Det defineres her som et orienteret træ, hvor hver kant svarer til resultatet af en vejning, og hvor et blad repræsenterer den kugle, man vha. opskrifter har fundet frem til, er den, der ikke vejer det samme som de andre.

Til sidst vil jeg se på, hvor få vejninger man kan nøjes med i en vejningsstrategi på n kugler.

2 Vejningsstrategier

Lad $n \geq 3$ og definér $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$. Så kaldes $f : [n] \rightarrow \{-1, 0, 1\}$ for en vægtfunktion hvis der findes netop ét $k \in [n]$ så $f(k) \neq 0$. Analogien til problemet ovenfor er, at hvis $f(k) = 1$ eller $f(k) = -1$ er k vejer bold k mere henholdsvis mindre end de andre bolde.

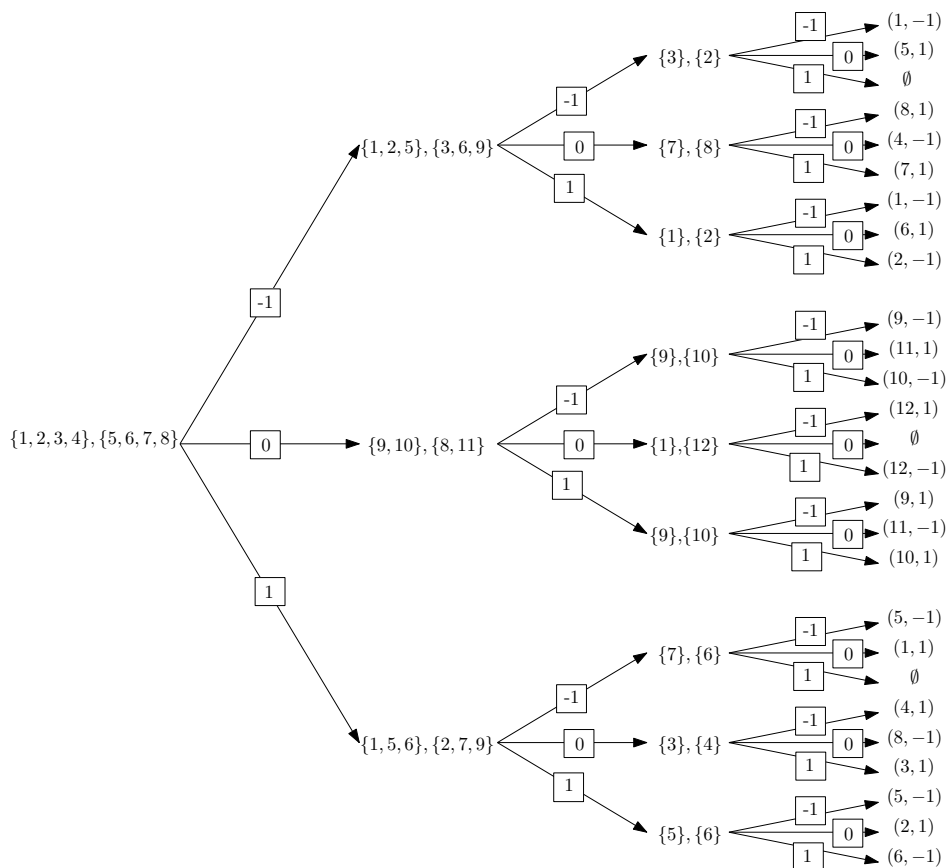
Vi definerer nu en *vægt* til at være en funktion $V_f : 2^{[n]} \rightarrow \{-1, 0, 1\}$ givet ved

$$V_f(A) = \sum_{a \in A} f(a),$$

for $A \subseteq [n]$ og vi siger at A vejer henholdsvis mindre end, mere end og det samme som B hvis henholdsvis $V_f(A) < V_f(B)$, $V_f(A) > V_f(B)$ og $V_f(A) = V_f(B)$ for $A, B \subseteq [n]$.

En *vejningsstrategi* på n kugler er et orienteret træ, hvor vi til hver knude, der ikke er et blad, tilknytter to delmængder af $[n]$. En bestemt knude kaldes startknuden, og har 3 kanter ud og ingen ind. Alle andre knuder, der ikke er blade, har 1 kant ind og 3 ud. Til hver knude v , der ikke er et blad, med tilknyttede mængder $A_v, B_v \subseteq [n]$, mærker vi de tre kanter ud med (A_v, B_v, w) for $w = -1, 0, 1$ henholdsvis, svarende til om A_v vejere mindre, det samme eller mere end B_v , og værdien af w på en kant (v_1, v_2) kalder vi w_{v_2} . Til et blad b tilknytter vi et par

$$(k_b, w_b) \in [n] \times \{-1, 1\}$$



Figur 1: En vejningsstrategi på 12 bolde

kaldet en *løsning*. Lad nu en sti $(v_0, v_1, \dots, v_{m-1}, v_m)$ fra startknuden v_0 til et blad $v_m = b$ være givet. En vægtfunktion f siges at passe til vejningsstrategien, hvis

$$V_f(A_{v_i}) - V_f(B_{v_i}) = w_{v_{i+1}}$$

for alle $0 \leq i < m$. For en vejningsstrategi kræver vi derfor, at der for alle sådanne stier findes højst én vægtfunktion f , der passer til stien. For en sådan vægtfunktion har vi

$$f(k_b) = w_b \neq 0,$$

da denne vægtfunktion netop passer til stien, og per entydighed er det derfor den søgte funktion. For en vejningsstrategi S kalder vi antallet af kanter i den længste sti for strategiens *længde* og betegner den $l(S)$.

Figur 2 viser

3 Mindste antal vejninger

Lad os definere en funktion $B(n)$ for $n \geq 3$ som

$$B(n) = \min\{l(S) \mid S \text{ vejningsstrategi}\},$$

dvs. $B(n)$ er det mindste antal vejninger, der givet n bolde, hvor én vejer mere eller mindre end de andre, skal bruges, for at finde netop dén bold, og bestemme om den vejer mere eller mindre end de andre. Den klassiske gåde om 12 bolde giver os, at $B(12) = 3$, og det ses at $B(3) = 2$. Det ses at $B(n) \leq n - 1$, da vi kan vælge en bold, og veje den mod alle andre bolde.