

Opgave A og B på ugeseddel 11, Calculus 09

Jonas Lindstrøm Jensen (jonas@imf.au.dk)

November 2009

Opgave A

Vi har $v_1 = (1, 2, 1)$, $v_2 = (3, -1, -1)$ og $S = \text{span}(v_1, v_2)$.

1. Vektorerne v_1 og v_2 er ortogonale, da

$$v_1 \cdot v_2 = 0.$$

2. Lad $b = (2, 2, 1)$. Ved at bruge formlen på side 238 ser vi, at

$$p = A(A^T A)^{-1} A^T b = (131/66, 68/33, 56/66),$$

hvor A er matricen med v_1 og v_2 som søjler, altså

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. Projektionen af b på v_1 er

$$p_1 = \frac{v_1 \cdot b}{v_1 \cdot v_1} v_1 = \frac{7}{6}(1, 2, 1) = (7/6, 14/6, 7/6),$$

og projektionen på v_2 er

$$p_2 = \frac{v_2 \cdot b}{v_2 \cdot v_2} v_2 = \frac{3}{11}(3, -1, -1) = (9/11, -3/11, -3/11).$$

4. Vi ser nu, at $p_1 + p_2 = p$, hvilket gælder idet v_1 og v_2 er ortogonale (overvej...).

Opgave B

Vi lader A være en $n \times k$ matrix, således at søjlerne udgør en basis for et underrum S , specielt er $S = R(A)$. Husk at $x \in S \iff x = Ay$ for en vektor $y \in \mathbb{R}^k$. Lad nu

$$P = A(A^T A)^{-1} A^T.$$

Vi vil flere gange i dette bevis benytte at

$$(A^T A)^{-1} A^T A = A^T A (A^T A)^{-1} = I.$$

Nu er

$$P^2 = A(A^T A)^{-1} A^T A (A^T A)^{-1} A^T = A(A^T A)^{-1} A^T = P.$$

En matrix der opfylder den slags kaldes *idempotent*.

Vi vil nu vise at de eneste muligheder for egenverdier for P er 0 og 1. Antag at λ er egenverdi for P . Så er

$$Px = \lambda x$$

for en ikke-nul vektor x . Hvis $Px = 0$ ser vi, at $\lambda 0$ er eneste mulige egenverdi, idet x ikke er nulvektoren. Ved at gange med P på begge sider får vi at

$$Px = \lambda Px$$

idet $P^2 = P$, og vi ser da, at $\lambda = 1$ er eneste mulighed, hvis $Px \neq 0$.

Hvis $\lambda = 1$ er egenverdi for en vektor x svarer det til at

$$Px = x.$$

Vi vil nu vise at det netop gælder når $x \in S$. Så vi vil altså først antage, at $x \in S$ og bruge det til at vise, at $Px = x$ og derefter den anden vej rundt – det viser nemlig at egenrummet tilhørende egenverdien $\lambda = 1$ og S er præcis de samme.

Først vil vi vise, at hvis $x \in S$, så er $Px = x$. Det svarer ganske godt overnes med vores fortolkning af Px som værende projektionen af x på S . Hvis $x \in S$, findes der en vektor y således at

$$x = Ay.$$

Og vi får da, at

$$Px = PAy = A(A^T A)^{-1} A^T Ay = Ay = x,$$

som ønsket. Antag nu at $Px = x$. Per definition af P får vi så at

$$A(A^T A)^{-1} A^T x = x,$$

og dermed at

$$Ay = x$$

når $y = (A^T A)^{-1} A^T x$. Det viser at $x \in S$.

Vi ser nu på egenrummet tilknyttet egenværdien $\lambda = 0$. Hvis $\lambda = 0$ er egenværdi for en vektor x er

$$Px = 0,$$

altså er

$$A(A^T A)^{-1} A^T x = 0,$$

Ved at gange med A^T på begge sider får vi så at

$$A^T A(A^T A)^{-1} A^T x = 0,$$

og dermed at

$$A^T x = 0,$$

altså ligger x i nulrummet $N(A^T)$, som ifølge sætning 5.2.1 (side 227) er det samme som $R(A)^\perp = S^\perp$. Antag nu, at $x \in S^\perp$. Så er

$$A^T x = 0$$

idet $N(A^T) = S^\perp$ per sætning 5.2.1 som før. Vi får da også, at

$$0 = A(A^T A)^{-1} A^T x = Px,$$

da $A(A^T A)^{-1} 0 = 0$, og dermed er $Px = 0$ som ønsket.