Matematik og dam

– hvordan matematik kan give overraskende resultater om et velkendt spil

Jonas Lindstrøm Jensen (jonas@imf.au.dk)

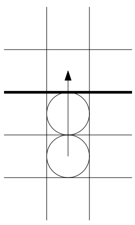
March 2010

1 Indledning

Det klassiske spil dam spilles på et almindeligt skakbræt. Normalt kan man kun bevæge sig diagonalt, og hoppe over modstanderens brikker, men her ser vi lidt anderledes på det. For det første er der ingen modstander, man kan hoppe over sine egne brikker lodret og vandret og brættet er uendeligt stort.

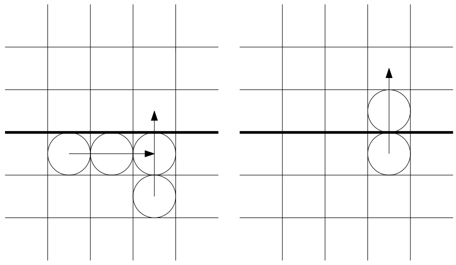
Opgaven er som følger: Vi deler brættet i to med en vandret streg. Man må nu placere sine brikker som man vil under stregen, og de skal placeres således, at man kan komme så langt som muligt op på den anden banehalvdel ved at hoppe over brikker. En brik man hopper over forsvinder ligesom i almindelig dam.

Det er ret enkelt at komme ét felt op på den anden banehalvdel - det skal man kun bruge to brikker til. Man skal bruge fire brikker for at komme to felter op – det er heller ikke så svært. Sværere er det at komme tre felter op – det kræver mindst otte brikker (prøv!).



Figur 1: Sådan kommer man ét felt op over midterlinjen.

Den naive matematiker ville nu forvente, at man skal bruge 16 brikker (hvorfor det?) for at komme fire felter op, men nej, det kræver faktisk 20 brikker. Vi viser eksempler på strategier til at gøre dette i appendix til sidst, og vil nu istedet se på følgende spørgsmål: Kan man komme fem felter op?



Figur 2: Sådan kommer man to felter op over midterlinjen.

2 Vægtning

Vi vil nu bevise, at det faktisk er umuligt at komme fem felter op. Lad os først overveje, at hvis man kan komme op til et felt, der er fem felter oppe, ville man også kunne have kommet til et hvilket som helst andet felt, der er fem felter oppe, idet vi jo bare kan rykke vores opstilling til højre og venstre som det passer os.

x^8	x^7	x^6	x^5	x^4	x^3	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8
x^7	x^6	x^5	x^4	x^3	x^2	x	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7
x^6	x^5	x^4	x^3	x^2	x	1	x	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6
x^7	x^6	x^5	x^4	x^3	x^2	x	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7
x^8	x^7	x^6	x^5	x^4	x^3	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8
x^9	x^8	x^7	x^6	x^5	x^4	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8	x^9
x^{10}	x^9	x^8	x^7	x^6	x^5	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8	x^9	x^{10}
x^{11}	x^{10}	x^9	x^8	x^7	x^6	x^5	x^6	x^7	x^8	x^9	x^{10}	x^{11}
x^{12}	x^{11}	x^{10}	x^9	x^8	x^7	x^6	x^7	x^8	x^9	x^{10}	x^{11}	x^{12}
x^{13}	x^{12}	x^{11}	x^{10}	x^9	x^8	x^7	x^8	x^9	x^{10}	x^{11}	x^{12}	x^{13}

Figur 3: Vi udstyrer hvert felt med vægte efter, hvor langt de er fra P.

Så lad os antage, at vi har lavet en opstilling, der kan flytte en brik fem felter op – kald det felt for P. Lad os nu tilegne hvert eneste felt på brættet et tal – det kalder vi feltets *vægt*. For en given opstilling af brikker, ser vi hvilke felter, der står brikker på, og så lægger vi de tilsvarende vægte sammen. Det kalder vi en opstillings *samlede vægt*. Lad x være et eller andet tal, som vi først vælger senere. Vi giver nu hvert felt vægten x^n, hvor n er det mindste antal lodrette eller vandrette ryk, man skal lave, for at komme fra feltet til P. Så P selv får vægten $x^0 = 1$, felterne til højre, venstre, ovenfor eller nedenfor P giver vi vægten x. Sådan fortsætter vi, og får så vægtene som på tegningen nedenfor.

Eksempel 1. Lad os se på opstillingen i figur 4. Vi ser at den samlede vægt her er

$$x + x^3 + x^4 + +x^5 + 2x^6 + x^{13}.$$

x^8	x^7	x^6	x^5	x^4	x^3	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8
x^7	x^6	x^5	x^4	x^3	x^2	x	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7
x^6	x^5	x^4	x^3	x^2	x	1	x	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6
x^7	x^6	x^5	x^4	x^3	x^2	x	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7
x^8	x^7	x^6	x^5	x^4	x^3	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8
x^9	x^8	x^7	x^6	x^5	x^4	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8	x^9
x^{10}	x^9	x^8	x^7	x^6	x^5	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8	x^9	x^{10}
x^{11}	x^{10}	x^9	x^8	x^7	x^6	x^5	x^6	x^7	x^8	x^9	x^{10}	x^{11}
x^{12}	x^{11}	x^{10}	x^9	x^8	x^7	x^6	x^7	x^8	x^9	x^{10}	x^{11}	x^{12}
x^{13}	x^{12}	x^{11}	x^{10}	x^9	x^8	x^7	x^8	x^9	x^{10}	x^{11}	x^{12}	x^{13}

Figur 4: En vilkårlig opstilling.

Lad os nu lave et træk, hvor en brik hopper over en anden. Vi får så en opstilling som i figur 5. Nu er vægten

$$x + x^3 + x^4 + +x^5 + 2x^6 + x^1 3 - x^3 - x^4 + x^2 = x + x^2 + x^5 + 2x^6 + x^{13}.$$

Vi ser at vi har trukket x^3 og x^4 fra, og så lagt x^2 til.

x^8	x^7	x^6	x^5	x^4	x^3	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8
x^7	x^6	x^5	x^4	x^3	x^2	x	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7
x^6	x^5	x^4	x^3	x^2	x	1	x	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6
x^7	x^6	x^5	x^4	x^3	x^2	x	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7
x^8	x^7	x^6	x^5	x^4	x^3	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8
x^9	x^8	x^7	x^6	x^5	x^4	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8	x^9
x^{10}	x^9	x^8	x^7	x^6	x^5	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8	x^9	x^{10}
x^{11}	x^{10}	x^9	x^8	x^7	x^6	x^5	x^6	x^7	x^8	x^9	x^{10}	x^{11}
x^{12}	x^{11}	x^{10}	x^9	x^8	x^7	x^6	x^7	x^8	x^9	x^{10}	x^{11}	x^{12}
x^{13}	x^{12}	x^{11}	x^{10}	x^9	x^8	x^7	x^8	x^9	x^{10}	x^{11}	x^{12}	x^{13}

Figur 5: Efter et træk har vi nu ændret den samlede vægt.

3 Hvordan ændres den samlede vægt, når vi gør et træk?

Som i eksemplet ovenfor, vil vi nu se på, hvordan den samlede vægt ændrer sig, når vi laver et træk. Der er tre muligheder:

1. Vi rykker tættere på P.
2. Vi rykker længere væk fra P.
3. Brikken vi springer med, ændrer ikke afstand til P.

På figur 6 kan vi se eksempler på alle tre typer af træk. Lad os nu se, hvad der sker med den samlede vægt i hvert af de tre tilfælde. Lad os antage, at brikken vi laver vores træk med, står på et felt med vægten x^n for et eller andet n..

x^8	x^7	x^6	x^5	x^4	x^3	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8
x^7	x^6	x^5	x^4	x^3	x^2	x	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7
x^6	x^5	x^4	x^3	x^2	x	1	x	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6
x^7	x^6	x^5	x^4	x^3	x^2	x	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7
x^8	x^7	x^6	x^5	x^4	x^3	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8
x^9	x^8	x^7	x^6	x^5	x^4	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8	x^9
x^{10}	x^9	x^8	x^7	x^6	x^5	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8	x^9	x^{10}
x^{11}	x^{10}	x^9	x^8	x^7	x^6	x^5	x^6	x^7	x^8	x^9	x^{10}	x^{11}
x^{12}	x^{11}	x^{10}	x^9	x^8	x^7	x^6	x^7	x^8	x^9	x^{10}	x^{11}	x^{12}
x^{13}	x^{12}	x^{11}	x^{10}	x^9	x^8	x^7	x^8	x^9	x^{10}	x^{11}	x^{12}	x^{13}

Figur 6: Tre forskellige træk, hvor vi bevæger os længere væk fra P, tættere på P eller bevarer afstanden.

1. Hvis vi rykker tættere på P, er vi i en situation, hvor vi springer fra x^n til x^{n-2}, og en brik med vægt x^{n-1} forsvinder, idet vi hopper over den. Så vægten ændres altså med

$$x^{n-2} - x^n - x^{n-1} = x^{n-2}(1 - x - x^2).$$

2. Hvis vi rykker længere væk fra P springer vi fra x^n til x^{n+2}, og vi springer over en brik med vægt x^{n+1}. Så den samlede vægt ændres nu med

$$x^{n+2} - x^n - x^{n+1} = x^n(x^2 - x - 1).$$

3. Lad os nu se på det sidste tilfælde. Her springer vi fra et felt med vægt x^n til et felt med samme vægt, og vi hopper over en brik med vægt x^{n-1}. Så alt i alt ændres den samlede vægt med

$$-x^{n-1}.$$

Husk på at vi stadig ikke har valgt, hvad vores x skal være. Vi vil gerne vælge vores x således, at et træk af type 1 ikke ændrer den samlede vægt. Det kan gøres hvis vi vælger x så

$$1 - x - x^2 = 0. \tag{1}$$

Det er en andengradsligning med to rødder, og vi vælger den positive af dem, nemlig[1]

$$x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \approx 0,61803.$$

Vi ved nu, at et træk af type 1 ikke ændrer ved den samlede vægt af en opstilling, for sådan har vi valgt vores x. Af (1) får vi også, at

$$x^2 = 1 - x,$$

så vi ser at et træk at type 2 giver en ændring på

$$x^n(x^2 - x - 1) = x^n(1 - x - x - 1) = x^n(-2x) = -2x^{n+1} < 0,$$

så et træk af type 2, altså et hvor vi bevæger os længere væk, gør den samlede vægt mindre. Et træk af type 3 ændrer som sagt den samlede vægt med $-x^{n-1}$, så da $x > 0$ reducerer sådan et træk altså også den samlede vægt.

Alt i alt kan vi konkludere, at alle typer af træk enten reducerer den samlede vægt, eller også ændres den ikke – vi kan ikke øge vægten! Så en opstilling der kan sende en brik på til feltet P, der jo har vægten 1, må have en samlet vægt, der er større end eller lig med 1, ellers kan vi aldrig komme derop.

Vi vil i næste afsnit vise, at sådan en opstilling er umulig.

4 Uendelige summer

Vi får brug for følgende sætning om uendelige summer.

Sætning 2 (Den geometriske række)**.** *Lad $x \in]-1, 1[$ være givet. Så er*

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots = \frac{1}{1 - x}.$$

[1]Den kvikke læser vil her se, at $x = \phi^{-1}$, hvor $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ er det gyldne snit, der dukker op i mange sammenhænge og nu også her.

Bevis. Ved at gange venstresiden med $1-x$ får vi

$$\begin{aligned}(1-x)(1+x+x^2+x^3+\cdots) &= 1+x+x^2+x^3+\cdots - x(1+x+x^2+x^3+\cdots)\\ &= 1+x+x^2+x^3+\cdots - x - x^2 - x^3 - x^4 - \cdots\\ &= 1,\end{aligned}$$

så det ønskede resultat fås ved at dividere med $1-x$ på begge sider. □

Lad os nu se, hvad den samlede vægt af alle felter under midterlinjen er. Søjlen lige under P bidrager med vægtene

$$x^5+x^6+x^7+x^8+\cdots = x^5(1+x+x^2+x^3+\cdots) = \frac{x^5}{1-x}.$$

De to søjler lige ved siden af bidrager hver med

$$x^6+x^7+x^8+x^9+\cdots = x^6(1+x+x^2+x^3+\cdots) = \frac{x^6}{1-x},$$

og de to søjler ved siden af dem bidrager hver med

$$x^7+x^8+x^9+x^{10}+\cdots = x^7(1+x+x^2+x^3+\cdots) = \frac{x^7}{1-x}.$$

Hvis vi fortsætter sådan får vi, at den samlede vægt af den nedeste halvdel af brættet er

$$S = \frac{x^5}{1-x} + 2\frac{x^6}{1-x} + 2\frac{x^7}{1-x} + 2\frac{x^8}{1-x} + \cdots.$$

Ved lidt regnerier ser vi, at

$$\begin{aligned}S &= \frac{x^5}{1-x} + 2\left(\frac{x^6}{1-x} + \frac{x^7}{1-x} + \frac{x^8}{1-x} + \cdots\right)\\ &= \frac{x^5}{1-x} + \frac{2x^6}{1-x}(1+x+x^2+\cdots)\\ &= \frac{x^5}{1-x} + \frac{2x^6}{1-x}\frac{1}{1-x}.\end{aligned}$$

Husk nu på, at $1-x=x^2$, så vi får at

$$\begin{aligned}S &= \frac{x^5}{x^2} + \frac{2x^6}{x^2}\frac{1}{x^2}\\ &= x^3+2x^2\\ &= x(1-x)+2(1-x)\\ &= 2-x^2-x\\ &= 2-(1-x)-x\\ &= 1.\end{aligned}$$

Så hvis vi har brikker på alle felter i den nederste halvdel af brættet, så har de en samlet vægt, der er præcis 1. Så hvis blot et felt står ledigt, så vil den samlede vægt være mindre end 1, og så kan vi aldrig kommer op til P, idet et træk aldrig kan øge den samlede vægt.

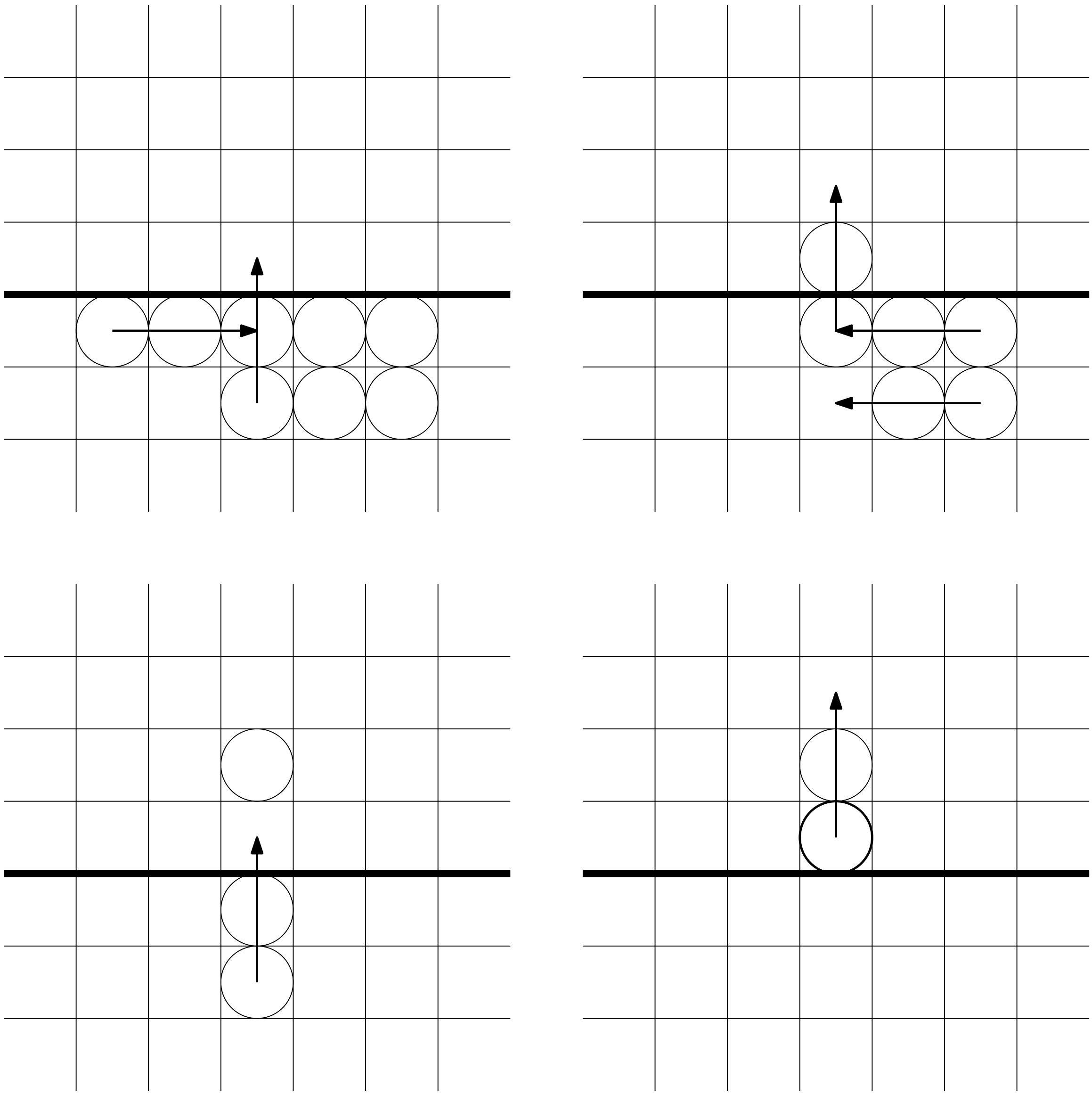
Men hvorfor kan vi så bare ikke placere brikker på alle felter? Det kan man sådan set også godt, men det giver ikke mening at placere brikker, som vi ikke bruger, så vi skal i så fald bruge uendeligt mange træk, så vi kommer aldrig op til P.

Det viser det vi ønskede, nemlig at det er umuligt at komme fem felter op.

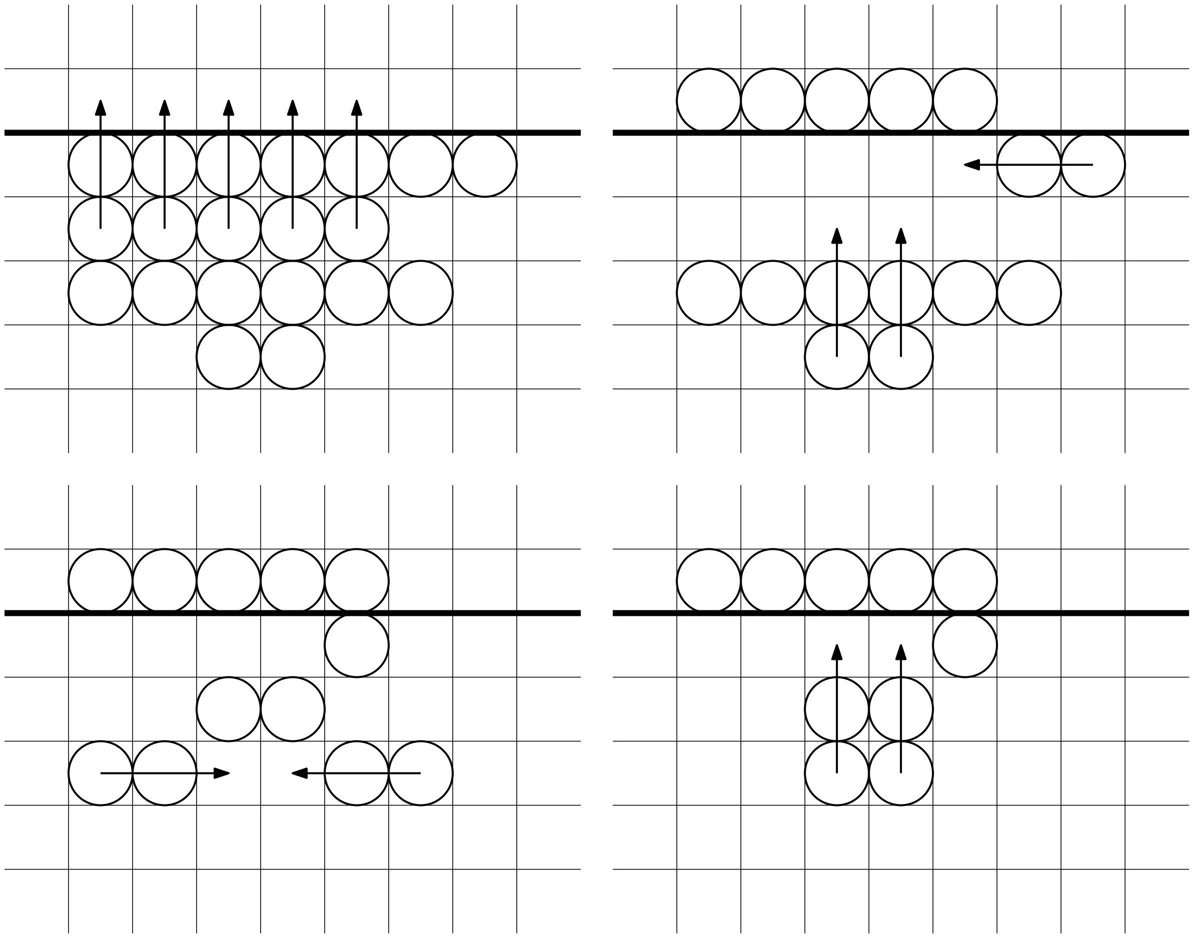
Litteratur

[1] Honsberger, Ross (1976), *Mathematical Gems II.*

Appendix



Figur 7: En løsning, der bruger otte brikker, og bringer en brik tre felter op.



Figur 8: En løsning, der bruger 20 brikker, og bringer en brik fire felter op. For at afslutte denne skal du bruge figur 7, idet vi nu er i samme situation som dér – men nu ét felt højere oppe.