

Nabofjendske følger

Jonas Lindstrøm Jensen (jonas@imf.au.dk)

November 2009

Definition 1. En endelig følge $x = (x_1, \dots, x_n) \in [n]$ med $x_i \neq x_j$ for $i \neq j$ kaldes valid, hvis

$$|x_i - x_{i+1}| \neq 1$$

for $i = 1, 2, \dots, n-1$. Vi betegner mængden af valide n -følger V_n .

Eksempel 2. Det ses, at $V_n \neq \emptyset$ for $n \geq 4$. For $n = 5$ er $(1, 3, 5, 2, 4)$ og $(3, 5, 1, 4, 2)$ valide følger.

Vi får også brug for følgende definition.

Definition 3. En valid følge (x_1, \dots, x_n) kaldes cyklisk, hvis $|x_1 - x_n| \neq 1$. Mængden af valide cykliske følger betegner vi \bar{V}_n .

Da $V_1 = V_2 = V_3 = \emptyset$ er $\phi(n) = 0$ for $n \leq 3$. For $n = 4$ findes der to valide følger $(2, 4, 1, 3)$ og $(3, 1, 4, 2)$. For $n = 5$ findes der 14 valide følger:

$$\begin{aligned} &(1, 3, 5, 2, 4), (3, 5, 2, 4, 1), (5, 2, 4, 1, 3), (2, 4, 1, 3, 5), (4, 1, 3, 5, 2) \\ &(4, 2, 5, 3, 1), (1, 4, 2, 5, 3), (3, 1, 4, 2, 5), (5, 3, 1, 4, 2), (2, 5, 3, 1, 4) \\ &(3, 1, 5, 2, 4), (3, 5, 1, 4, 2), (4, 2, 5, 3, 1), (2, 4, 1, 5, 3). \end{aligned}$$

Vi ser her, at $\#V_n = 14$, $\#\bar{V}_n = 10$.

Lad nu V_n^k betegne de valide følger, der har k på første koordinat. Så har vi følgende lemma.

Lemma 4. Lad $n \geq 5$. Så er

$$\frac{\#\bar{V}_n}{n} = \#V_{n-1} - 2\#V_{n-1}^1.$$

Bevis. Vi bemærker, at der er $\#V_{n-1} - 2\#V_{n-1}^1$ følger i V_{n-1} , der ikke har 1 på første eller sidste koordinat. Lad en sådan cyklisk $(n-1)$ -følge (x_1, \dots, x_{n-1}) være givet. Så er

$$(1, x_1 + 1, \dots, x_{n-1} + 1)$$

en cyklisk n -følge. Hvis vi lader en cyklisk n -følge med 1 på første koordinat $(1, y_1, \dots, y_{n-1})$ være givet, så er

$$(y_1 - 1, \dots, y_{n-1} - 1)$$

en cyklisk $(n-1)$ -følge, og da $y_1, y_{n-1} \neq 2$, er det præcis en af de $(n-1)$ -følger vi betragtede ovenfor. Det afslutter beviset, da der er $\frac{1}{n}\#\bar{V}_n$ cykliske n -følger med 1 på første koordinat. \square

Eksempel 5. Vi ser at $\#V_4 = 2$ og $\#V_4^1 = 0$, så lemmaet ovenfor giver, at

$$\#\bar{V}_5 = 10,$$

hvilket vi også så i eksemplet tidligere. Vi kan også udregne at

$$\#\bar{V}_6 = 6 \cdot (14 - 2 \cdot 2) = 60.$$

Vi definerer nu en funktion $\tau : V_n \rightarrow V_n$ ved at 'vende' følgen, altså

$$\tau(x_1, \dots, x_n) = (x_n, \dots, x_1),$$

vi definerer $\sigma : \bar{V}_n \rightarrow \bar{V}_n$ ved

$$\sigma(x_1, \dots, x_n) = (x_2, \dots, x_n, x_1),$$

og bemærker, at den er veldefineret, idet $\sigma(x)$ er valid og cyklisk, hvis x er valid og cyklisk. De to afbildninger er begge bijektioner, og vi har ligningerne

$$\tau^2 = 1, \sigma^n = 1$$

og

$$\tau\sigma^k = \sigma^{-k}\tau.$$

Ved at bruge ovenstående ligninger ser vi, at ethvert produkt af τ og σ kan skrives som

$$\sigma^k\tau^m$$

for $0 \leq k \leq n-1$ og $0 \leq m \leq 1$. Det bruger vi til at lave følgende definition.

Definition 6. To valide følger x, y kaldes ækvivalente hvis der findes $k, l, m \geq 0$ så

$$x = \sigma^k\tau^m(y).$$

Det giver en veldefineret ækvivalensrelation, og vi skriver $x \sim y$. Mængden af ækvivalensklasser betegner vi C_n . Bemærk at hvis de følger vi betragter ikke er cykliske, må $k = 0$, idet σ kun er defineret på cykliske følger. Bemærk at både τ og σ bevarer cykliskhed, så det giver mening at tale om cykliske og ikke-cykliske ækvivalensklasser.

Vi definerer nu en funktion $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ved

$$\phi(n) = \#C_n.$$

Af eksemplerne ovenfor ser vi, at $\phi(4) = 1$ og $\phi(5) = 2$. Lad os nu se på tilfældet $n = 6$. Så er følgerne nedenfor repræsentanter for forskellige ækvivalensklasser i C_n .

$$\begin{aligned} &(1, 3, 5, 2, 4, 6), (1, 3, 5, 2, 6, 4), (1, 3, 6, 4, 2, 5), (1, 4, 2, 5, 3, 6), (1, 4, 2, 6, 3, 5), \\ &(1, 4, 6, 3, 5, 2), (1, 5, 3, 6, 4, 2), (2, 4, 6, 1, 5, 3), (2, 5, 1, 4, 6, 3), (2, 6, 4, 1, 5, 3), \\ &(3, 1, 5, 2, 6, 4), (3, 1, 6, 4, 5, 2), (3, 6, 2, 5, 1, 4), (3, 6, 1, 5, 2, 4), (3, 6, 4, 1, 5, 2), \\ &(3, 5, 1, 6, 2, 4), (3, 5, 1, 6, 4, 2), (3, 5, 2, 6, 1, 4), \end{aligned}$$

Så $\phi(6) = 18$. Det kræver en lille overvejelse at se, at vi har alle ækvivalensklasser med, men alle cykliske ækvivalensklasser kan findes med 1 på første koordinat, og derefter skal vi blot finde alle ikke-cykliske følger, der har 2 eller 3 på første koordinat og ikke har 1 på sidste koordinat. Vi skal desuden fjerne alle de repræsentanter, der kan fås ved at bruge $\sigma^5\tau$ på en anden repræsentant.

Vi ser nu, at der er

$$\frac{\#\bar{V}_n}{2n}$$

cykliske ækvivalensklasser i C_n , idet enhver cyklisk ækvivalensklasse har $2n$ repræsentanter. Vi bemærker, at ikke-cykliske ækvivalensklasser har 2 repræsentanter. Af det får vi ligningen

$$\phi(n) = \frac{\#V_n}{2} - \frac{(n-1)\#\bar{V}_n}{2n}.$$

Lad nu $V_n^{(i_1, k_1), \dots, (i_m, k_m)}$ betegne de n -følger (x_1, \dots, x_n) med k_l på den i_l 'te koordinat for alle $l = 1, 2, \dots, m$. Vi kalder disse for *betingede* følger, og bemærker at $V_n^k = V_n^{(1, k)}$.

Jeg mener nu, at man bør kunne opskrive en rekursiv formel, der giver $V_n^{(i_1, k_1), \dots, (i_m, k_m)}$ udtrykt ved kortere betingede følger. Dette vil give mulighed for at beregne V_n , idet

$$\#V_n = \sum_{k=1}^n \#V_n^k.$$