Kompleks Funktionsteori

Formelræs

1 Holomorfe funktioner

Sætning 1.1 (Caucy-Riemans ligninger)**.** *Funktionen* $f : G \to \mathbb{C}, f = u+iv$ *er holomorf i* $z_0 = x_0 + iy_0$ *hvis og kun hvis*

$$\frac{du}{dx} = \frac{dv}{dy} \text{ og } \frac{du}{dy} = -\frac{dv}{dx}$$

i punktet (x_0, y_0)*.*

Sætning 1.2 (Eulers Formler med mere (se også side 23-26))**.** *For* $z \in \mathbb{C}$ *gælder*

$$\exp(iz) = \cos z + i \sin z \qquad e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$$
$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$
$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

2 Integraler

Definition 2.1 (Kurveintegrale)**.** Lad $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ være en en vej og lad $f : \gamma^* \to \mathbb{C}$ være kontinuert. Så er kurveintegralet af f langs γ

$$\int_\gamma f = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

Længden af γ er

$$L(\gamma) = \int_a^b \left|\gamma'(t)\right| dt$$

Lemma 2.2 (Estimationslemmaet)**.** *Lad* $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ *være en vej. Så gælder for en kontinuert funktion* $f : \gamma^* \to \mathbb{C}$

$$\left|\int_\gamma f\right| \leq \max_{z\in\gamma^*} |f(z)|\, L(\gamma)$$

Sætning 2.3. *Hvis f har en stamfunktion F er*

$$\int_\gamma f = F(z_2) - F(z_1)$$

for enhver vej γ fra z_1 til z_2. Specielt er integralet nul for enhver lukket vej.

Sætning 2.4. *For $f : G \to \mathbb{C}$ på et område G er følgende ækvivalent*

- *f har en stamfunktion.*
- *For vilkårlige $z_1, z_2 \in G$ har $\int_\gamma f$ samme værdi for enhver vej γ fra z_1 til z_2.*
- *$\int_\gamma = 0$ for enhver lukket vej γ i G.*

Hvis betingelserne er opfyldt, er $F(z) := \int_\gamma f$ en stamfunktion til f, hvor γ er en vej fra et z_0 til z.

3 Cauchys integralformel

Sætning 3.1 (Cauchys integralsætning)**.** *Lad f være holomorf på et enkelt-sammenhængende område G og lad γ være en lukket vej i G. Så er*

$$\int_\gamma f = 0$$

Sætning 3.2 (Caychys integralformel)**.** *Lad $f : G \to \mathbb{C}$ være holomorf på en åben mængde G og antag $\overline{K(a,r)} \subseteq G$. For alle $z_0 \in K(a,r)$ gælder*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta K(a,r)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

idet cirklen gennemløbes en gang mod uret.

Eksempel 3.3 (Eksempel 3.11, s. 52)**.** viser hvordan man kan vise nogle integralformler ved at integrerer rundt om en firkant. Husk den!

4 Anvendelse af Cauchys integralformel

Sætning 4.1 (Weirstrass' majorantrække sætning)**.** *Lad $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ være en uendelig række af funktioner fra M til $\mathbb{C}$. Antag der findes en konvergent række $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ så*

$$\forall n \in \mathbb{N}\, \forall x \in M \,:\, |f_n(x)| \leq a_n$$

Så er $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ uniformt konvergent på M.

Sætning 4.2 (Taylor rækker)**.** *Lad f være holomorf på G. Så er f vilkårligt ofte differentiabel, og har en Taylorrække i $K(a,\rho) \subseteq G$*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n \quad \textit{for } f \in K(a,\rho)$$

Og for $\overline{K(a,r)} \subseteq G$ og $z_0 \in K(a,r)$ gælder

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\delta K(a,r)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$$

Sætning 4.3 (Picards sætning)**.** *En ikke konstant hel funktion har enten billede $\mathbb{C}$ eller $\mathbb{C} \setminus \{a\}$ for et $a \in \mathbb{C}$. For en hel funktion der ikke er et polynomium, er urbilledet af et punkt en uendelig mængde for alle punkter på hær højst eet.*

Sætning 4.4 (Liouvilles sætning)**.** *En begrænset hel funktion er konstant*

5 Argument. Logaritme. Potens.

Definition 5.1 (Fortætningspunkt)**.** Lad $A \subseteq \mathbb{C}$. Et punkt $a \in \mathbb{C}$ kaldes et fortætningspunkt for A, hvis

$$\forall r > 0 : K'(a,r) \cap A \neq$$

En delmængde kaldes diskret hvis den ikke har nogen fortætnigns punkter.

Sætning 5.2 (Diskret billede)**.** *Lad $f : A \to \mathbb{C}$ være kontinuert på en kurvesammenhængende mængde A. Hvis $f(A)$ er diskret i C, må f være konstant.*

Definition 5.3 (Argumentfunktion)**.** En argumentfunktion på en mængde $A \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$ forstås $\theta : A \to \mathbb{R}$ så $\theta(z) \in arg(z)$ for alle $z \in A$. Hovedargumentet $Arg(z)$ er det argument der ligger i $]-\pi$ og $\pi]$. Hovedargumentet er kontinuert på $C_\pi := \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{R} : z \leq 0\}$. For $r = |z|$ gælder

$$\begin{aligned} Arg(z) &= Arccos\frac{x}{r} \quad y > 0 \\ Arg(z) &= Arctan\frac{y}{x} \quad x > 0 \\ Arg(z) &= -Arccos\frac{x}{r} \quad y < 0 \end{aligned}$$

Man kan 'skære planen op' andre steder end π, se side 81 for dette. Man kan ofte finde kontinuerte argumentfunktioner.

Definition 5.4 (Logaritmefunktion)**.** Vi definerer logaritmen til

$$\log z = \log|z| + i \arg z$$

og hovedlogaritmen

$$Log z = \log|z| + i Arg z$$

Sætning 5.5. *For et område G er følgende ensbetydende*

1. *G er enkeltsammenhængende.*
2. *Enhver holomorf funktion på G har integrale 0 langs en lukket vej.*
3. *Enhver holomorf funktion på G har en stamfunktion.*
4. *Enhver nulpunktsfri holomorf funktion på G har en holomorf logaritme.*
5. *Enhver nulpunktsfri holomorf fukntion på G har en holomorf kvadratfod.*

Sætning 5.6. *Lad G være et enkeltsammenhængende område $\neq \mathbb{C}$. Så findes en bijektiv holomorf funktion $\phi : G \to K(0,1)$.*

Definition 5.7 (Omløbestal)**.** Lad $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ være en kontinuert kurve. Så er

$$argvar(\gamma) := \theta(b) - \theta(a)$$

for en vilkærlig argumentfunktion θ. Omløbstallet om nul er for en lukket kruve defineret ved

$$\omega(\gamma, 0) := \frac{1}{2\pi} argvar(\gamma)$$

Omløbstallet om et punkt z er så givet ved $\omega(\gamma, z) = \omega(\gamma - z, 0)$.

Sætning 5.8. *Lad $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ være en vej. Så er*

$$\int_\gamma \frac{1}{z} dz = \log\left|\frac{\gamma(a)}{\gamma(b)}\right| + iargvar(\gamma)$$

Hvis γ er lukket er

$$\omega(\gamma, 0) := \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \frac{1}{z} dz$$

6 Nulpunkter og isolerede singulariteter

Sætning 6.1. *Lad $f \in H(G)$ for et område G, og antag f ej er identisk 0. Hvis $a \in G$ er et nulpunkt for f, så findes et entydigt naturligt tal n og en entydig funktion $g \in H(G)$ med $g(a) \neq 0$ så*

$$f(z) = (z-a)^n g(z) \quad z \in G$$

n er nulpunktets multiplicitet. En alternativ karakterisation af n er

$$f(a) = f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0, \quad f^{(n)}(a) \neq 0$$

Sætning 6.2 (Nulpunkter er isolerede)**.** *Lad $f \in H(G)$ hvor G er et område, og antag f ej identisk 0. For ethvert nulpunkt a findes $r > 0$ så $f(z) \neq 0$ for $z \in K'(a,r) = K(a,r) \setminus \{a\}$. Mængden af nulpunkter $Z(f)$ er diskret.*

Sætning 6.3 (Identitetssætningen for holomorfe funktioner)**.** *Hvis to holomorfe funktioner f, g i er område G stemmer overens på $A \subseteq G$, hvor A har et fortætningspunkt, så er $f = g$ på G.*

Definition 6.4 (Isoleret singularitet)**.** Lad $G \subseteq \mathbb{C}$ være et område og lad $a \in G$. Hvis $f \in H(G \setminus \{a\}$ kaldes a en isoleret singularitet. Hvis a kan tillægges en værdi så f bliver holomorf i G kaldes a hævelig.

Sætning 6.5. *Antag at $f \in H(G \setminus \{a\})$ og at f er begrænset i $K'(a,r)$ for et $r > 0$. Så har f en hævelig singularitet i a.*

Definition 6.6 (Pol)**.** En isoleret singularitet a kaldes en pol af orden $m \in \mathbb{N}$ for f hvis $(z-a)^m f(z)$ har en grænseværdi for $z \to a$ og denne grænse er forskellig fra 0. En pol af orden 1 kaldes simpel.

Definition 6.7 (Væsentlig pol)**.** En isoleret singularitet der hverken er hævelig eller en pol kaldes væsentlig.

Sætning 6.8 (Casorati-Weirstrass' sætning)**.** *Hvis $f \in H(G \setminus \{a\})$ har en væsentlig singularitet i a, så er $f(K'(a,r))$ overalt tæt i $\mathbb{C}$ for alle $r > 0$ så $K(a,r) \subseteq G$.*

Definition 6.9 (Meromorf funktion)**.** Hvis en funktion f kun har isolerede singulariteter der er enten poler eller hævelige, kalder vi den meromorf, og tillægger den værdien ∞ i polerne. Den skal ydermere opfylde

- $P = \{z \in G | f(z) = \infty\}$ er diskret i G.
- Restriktionen $f_{|G \setminus P}$ er holomorf.
- Ethvert punkt $a \in P$ er pol for $f_{|G \setminus P}$.

Se ydermere kapitel 6.4.

Sætning 6.10 (Laurantrække). *Lad f være holomorf i $G = \{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z-a| < R_2\}$ hvor $0 \leq R_1 < R \leq \infty$. Så fremstilles f i G som en entydigt bestemt Laurantrække*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

hvor koefficienterne er givet ved

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta K(a,r)} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz$$

hvor $R_1 < r < R_2$. Vi definerer også $f_i \in H(K(a,\rho)$ for en laurantrække for f

$$f_i(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

og tilsvarende $f_e \in H(\mathbb{C} \setminus \{a\}$

$$f_e(z) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n}$$

f_e kaldes den principiale del af f.

Sætning 6.11 (Singularitet mht Laurantrække). *Den isolerede singularitet a for $f \in H(G \setminus \{a\}$ med Laurantrække givet som ovenfor er*

1. *hævelig, hvis og kun hvis $c_n = 0$ for $n < 0$.*
2. *en pol, hvis og kun hvis $c_n = 0$ for alle $n < 0$ på nær endelig mange. Polens orden er det største $m > 0$ så $c_{-m} \neq 0$.*
3. *en væsentlig singularitet, hvis og kun hvis $c_n \neq 0$ for uendelig mange $n < 0$.*

7 Residuer og deres anvendelse

Definition 7.1 (Residue). Lad $f \in H(G \setminus \{a\})$ have en isoleret singularitet i a med Laurantrækken

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

Så kaldes c_{-1} for residuet af f i punktet a og skrives $Res(f,a)$, dvs

$$Res(f,a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta K(a,r)} f(z) dz$$

for $0 < r < \rho$ hvor $K(a,\rho)$ er den største cirkelskive i G med centrum a. Vi kan erstatte cirklen $\delta K(a,r)$ med andre simple lukkede veje, der løber en gang rundt om a i positiv omløbsretning.

Proposition 7.2. *Man kan finde udregne esiduer pæ følgende mæde, når h er meromorf*

1. *Antag at h har en simpel pol i a. Så er*

$$Res(h, a) = \lim_{z \to a} (z - a)h(z)$$

2. *Antag at $h = f/g$ er meromorf med en simpel pol i a og at $f(a) \neq 0$, $g(a) = 0$ og $g'(a) \neq 0$. Så er*

$$Res(h, a) = \frac{f(a)}{g'(a)}$$

3. *Antag at h har en pol af orden $m \geq 1$ i a. Sæt $\phi(z) = (z - a)^m h(z)$ er*

$$Res(h, a) = \frac{\phi^{(m-1)}(a)}{(m-1)!}$$

Sætning 7.3 (Cauchys residuesætning)**.** *Lad G være et enkeltsammenhængende område, og lad $P = \{a_1, \ldots, a_n\} \subseteq G$. Lad γ være en simpel lukket vej i G som omslutter $a_1, \ldots, a_n$ og som gennemløbes een gang med positiv orientering. For $f \in H(G \setminus P)$ gælder så*

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} Res(f, a_j)$$

Sætning 7.4 (Antal poler og nulpunkter for en meromorf funktion)**.** *Lad $h : G \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ være meromorf i et enkeltsammenhængende område G, og lad γ være en positivt orienteret simpel lukket vej i G, der ikke går igennem nogen af h's nulpunkter og poler. Så er*

$$N - P = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{h'(z)}{h(z)} dz$$

Hvor N er antallet af nulpunkter og P er antallet af poler, begge talt med orden.

Bemærkning 7.5 (Argumentprincippet)*.* Lad $\Gamma = h \circ \gamma$. Bemærk at Γ forløber i $C \setminus \{0\}$. Hvis γ er defineret på $[a, b]$ er

$$N - P = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{h'(z)}{h(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{1}{z} dz = \omega(\Gamma, 0)$$

eller tilsvarende

$$2\pi(N - P) = argvar(\Gamma)$$

Sætning 7.6 (Rouches sætning)**.** *Lad $f, g \in H(G)$ hvor G er et enkelt-sammenhængende område. Lad γ være en simpel lukket vej i G og antag at*

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)|, \quad z \in \gamma^*$$

Så har f og g samme antal nulpunkter talt med multiplicitet i det område som γ omslutter.

Bemærkning 7.7 (Bestemt integraler)*.* Hvis vi vil udregne et integrale på formen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2} dx$$

eller lignende, så se eksampel 7.7.

Sætning 7.8. *Lad f være en rational funktion*

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{a_0 + a_1 z + \cdots + a_m z^m}{b_0 + b_1 z \cdots b_n z^n}$$

og antag at $n \geq m+2$ og at f ikke har nogen poler på den reelle akse. Så er

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} Res(f, z_j)$$

hvor $z_1, \ldots z_k$ er polerne i det øvre halvplan. Hvis $z_1, \ldots z_k$ er polerne i det nedre halvplan er

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(z) dz = -2\pi i \sum_{j=1}^{k} Res(f, z_j)$$

Sætning 7.9. *Lad f være meromorf i $\mathbb{C}$ og uden poler på den reelle akse og med kun endeligt mange poler $z_1, \ldots z_k$ i det øvre halvplan. Hvis*

$$\max_{0 \leq t \leq \pi} \left| f(Re^{it}) \right| \to 0 \text{ for } R \to \infty$$

så vil

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\lambda x} dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} Res(f(z) e^{i\lambda z}, z_j), \quad \lambda > 0$$

Sætning 7.10. *Hvis en funktion er på formen $f(\cos t, \sin t)$ gælder*

$$\int_0^{2\pi} f(\cos t, \sin t) = \int_{\delta K(0,1)} f\left(\frac{1}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right) \frac{1}{iz} dz$$

8 Nogle regneregler

$$\frac{1}{(z-a)(z-b)} = \frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-b}\right)$$

$$||w| - |u|| \leq |w-u|$$

$$|x-y| \leq |z| \iff |x-w| \leq |z| + |w-y|$$