

# Der findes transcendent tal

Jonas Lindstrøm Jensen (jonas@imf.au.dk)

December 2011

## 1 Indledning

**Definition 1.** Et tal  $\alpha \in \mathbb{R}$  kaldes *algebraisk*, hvis der findes et polynomium  $f(x) = a_0x^n + \dots + a_{n-1}x + a_n$  med  $a_0 \neq 0$  og  $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$  så  $f(\alpha) = 0$ . Vi siger at graden af  $\alpha$  er  $n \in \mathbb{N}$ , hvis der ikke findes noget polynomium af lavere grad, der har  $\alpha$  som rod. Et tal der ikke er algebraisk kaldes *transcendent*.

I denne note vil vi vise eksistensen af transcendent tal. Idéen er at definere de såkaldte *Liouville-tal*, vise at der findes et Liouville-tal, og derefter vise, at Liouville-tal ikke kan være algebraiske. Lad os først definere hvad det vil sige at være et Liouville-tal.

**Definition 2.** Et tal  $\alpha \in \mathbb{R}$  kaldes et *Liouville-tal*, hvis der for alle  $n \in \mathbb{N}$  findes  $p, q \in \mathbb{Z}$  med  $q \geq 2$  således at

$$0 < \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^n}. \quad (1)$$

Altså kan et Liouville-tal approksimeres utrolig godt af brøker – mere om det i en anden note.

## 2 Der findes et Liouville-tal

Lad os nu vise, at der findes Liouville-tal. Vi påstår at Liouvilles konstant

$$\alpha = \sum_{j=1}^{\infty} 10^{-j!}$$

er et Liouville-tal. For hvert  $n \in \mathbb{N}$  skal vi nu kunne finde  $p, q \in \mathbb{Z}$  så (1) er opfyldt. Vi påstår at

$$p = \sum_{j=1}^n 10^{n!-j} \quad q = 10^{n!}$$

opfylder det ønskede. For så er

$$0 < \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| = \sum_{j=n+1}^{\infty} 10^{-j!} = \frac{1}{10^{(n+1)!}} + \frac{1}{10^{(n+2)!}} + \frac{1}{10^{(n+3)!}} + \dots,$$

og dette er lig med  $0,0 \cdots 010 \cdots 010 \cdots 010 \cdots$ , hvor det første et-tal er på den  $(n+1)!$ 'te plads, det næste er på den  $(n+2)!$ 'te plads osv. Det er nu skarpt mindre end  $\frac{10}{10^{(n+1)!}} = 10 \cdot (10^{-n!})^{n+1}$ , idet det jo er et tal på formen  $0,0 \cdots 010 \cdots$ , hvor det eneste et-tal er på den  $((n+1)! - 1)$ 'te plads. Det tal er mindre end  $(10^{-n!})^n = \frac{1}{q^n}$ , og dermed har vi vist, at  $\alpha$  er et Liouville tal.

### 3 Liouville-tal er transcendent

Vi vil nu vise, at algebraiske tal *ikke* kan være Liouville-tal, for i så fald må ovenstående  $\alpha$  jo være transcendent, hvilket vi gerne ville vise. Vi viser nu følgende sætning.

**Theorem 3.** Hvis  $\alpha \in \mathbb{R}$  er algebraisk af grad  $n > 0$ , så findes  $c > 0$  således at for alle  $p, q \in \mathbb{Z}$  med  $q \neq 0$  gælder at

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| > \frac{c}{q^n}.$$

*Proof.* Lad  $f$  være et polynomium af grad  $n$  med  $f(\alpha) = 0$ . Lad nu

$$M = \max_{x \in [\alpha-1, \alpha+1]} |f'(x)|,$$

og lad  $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}$  være de rødder  $f$  har, der er forskellige fra  $\alpha$ . Vælg nu et positivt  $c \in \mathbb{R}$  så

$$c < \min \left\{ 1, \frac{1}{M}, |\alpha - \alpha_1|, \dots, |\alpha - \alpha_m| \right\}.$$

Antag for modstrid, at der findes  $p, q \in \mathbb{Z}$  så

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{c}{q^n}. \quad (2)$$

Vi kan ydermere antage at  $q > 0$ . Så er

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \leq c < \min \left\{ 1, \frac{1}{M}, |\alpha - \alpha_1|, \dots, |\alpha - \alpha_m| \right\}.$$

Dermed må det gælde at

$$\frac{p}{q} \in [\alpha - 1, \alpha + 1],$$

men  $p/q$  er ikke et af tallene  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ , og der er heller ikke nogen af disse, der ligger i intervallet mellem  $\frac{p}{q}$  og  $\alpha$ . Af Middelværdisætningen<sup>1</sup> findes nu  $x_0$  i intervallet mellem  $\alpha$  og  $\frac{p}{q}$  så

$$f'(x_0) = \frac{f(\alpha) - f(p/q)}{\alpha - p/q},$$

<sup>1</sup>Se fx <http://da.wikipedia.com/middelværdisætningen>

og altså

$$\left| \frac{f(p/q)}{f'(x_0)} \right| = \left| \alpha - \frac{p}{q} \right|. \quad (3)$$

Da  $f$  er et polynomium med heltalskoefficienter findes der  $c_0, \dots, c_n \in \mathbb{Z}$  så

$$\begin{aligned} |f(p/q)| &= \left| c_0 \left(\frac{p}{q}\right)^n + c_1 \left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \dots + c_{n-1} \frac{p}{q} + c_n \right| \\ &= \frac{1}{q^n} |c_0 p^n + c_1 p^{n-1} q + \dots + c_{n-1} p q^{n-1} + c_n q^n| \\ &\geq \frac{1}{q^n} \end{aligned} \quad (4)$$

idet  $|c_0 p^n + c_1 p^{n-1} q + \dots + c_{n-1} p q^{n-1} + c_n q^n| \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , da  $c_0, \dots, c_n \in \mathbb{Z}$  og  $f(p/q) \neq 0$ . Men da

$$|f'(x_0)| \leq M \quad (5)$$

og

$$\frac{1}{M} > c \quad (6)$$

må

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \stackrel{(3)}{=} \left| \frac{f(p/q)}{f'(x_0)} \right| \stackrel{(4)+(5)}{\geq} \frac{1}{q^n M} \stackrel{(6)}{>} \frac{c}{q^n} \stackrel{(2)}{\geq} \left| \alpha - \frac{p}{q} \right|$$

hvilket er en modstrid, og sætningen er da bevist.  $\square$

Nu mangler vi blot det følgende lemma, for at færdiggøre vores bevis.

**Lemma 4.** *Et Liouville-tal er transcendent.*

*Proof.* Lad  $\alpha \in \mathbb{R}$  være et Liouville-tal. Antag for modstrid, at  $\alpha$  er algebraisk. Af theorem 3 findes der så et  $n \in \mathbb{N}$  og  $c > 0$  således at

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| > \frac{c}{q^n} \quad (7)$$

for alle  $p, q \in \mathbb{Z}$ . Vælg nu  $k \in \mathbb{N}$  således at

$$\frac{1}{2^k} \leq c$$

og lad  $m = k + n$ . Da  $\alpha$  er et Liouville-tal, findes  $a, b \in \mathbb{Z}$  med  $b \geq 2$  således at

$$\left| \alpha - \frac{a}{b} \right| < \frac{1}{b^m}.$$

Men

$$\frac{1}{b^m} = \frac{1}{b^k b^n} \leq \frac{1}{2^k} \frac{1}{b^n} \leq \frac{c}{b^n}$$

hvilket er i modstrid mod (7).  $\square$

Det afslutter vores bevis, idet Liouvilles konstant må være et eksempel på et transcendent tal. Kommentarer og rettelser kan sendes til jonas@imf.au.dk.