

# Kompleks Funktionsteori

## Formelræs

### 1 Holomorfe funktioner

**Sætning 1.1** (Cauchy-Riemans ligninger). *Funktionen  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f = u + iv$  er holomorf i  $z_0 = x_0 + iy_0$  hvis og kun hvis*

$$\frac{du}{dx} = \frac{dv}{dy} \text{ og } \frac{du}{dy} = -\frac{dv}{dx}$$

i punktet  $(x_0, y_0)$ .

**Sætning 1.2** (Eulers Formler med mere (se også side 23-26)). *For  $z \in \mathbb{C}$  gælder*

$$\begin{aligned} \exp(iz) &= \cos z + i \sin z & e^{x+iy} &= e^x(\cos y + i \sin y) \\ \cos z &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} & \sinh z &= \frac{e^z - e^{-z}}{2} \\ \sin z &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} & \cosh z &= \frac{e^z + e^{-z}}{2} \end{aligned}$$

### 2 Integraler

**Definition 2.1** (Kurveintegrale). *Lad  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  være en vej og lad  $f : \gamma^* \rightarrow \mathbb{C}$  være kontinuert. Så er kurveintegralet af  $f$  langs  $\gamma$*

$$\int_{\gamma} f = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

Længden af  $\gamma$  er

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$$

**Lemma 2.2** (Estimationslemmet). *Lad  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  være en vej. Så gælder for en kontinuert funktion  $f : \gamma^* \rightarrow \mathbb{C}$*

$$\left| \int_{\gamma} f \right| \leq \max_{z \in \gamma^*} |f(z)| L(\gamma)$$

**Sætning 2.3.** Hvis  $f$  har en stamfunktion  $F$  er

$$\int_{\gamma} f = F(z_2) - F(z_1)$$

for enhver vej  $\gamma$  fra  $z_1$  til  $z_2$ . Specielt er integralet nul for enhver lukket vej.

**Sætning 2.4.** For  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  på et område  $G$  er følgende ækvivalent

- $f$  har en stamfunktion.
- For vilkårlige  $z_1, z_2 \in G$  har  $\int_{\gamma} f$  samme værdi for enhver vej  $\gamma$  fra  $z_1$  til  $z_2$ .
- $\int_{\gamma} f = 0$  for enhver lukket vej  $\gamma$  i  $G$ .

Hvis betingelserne er opfyldt, er  $F(z) := \int_{\gamma} f$  en stamfunktion til  $f$ , hvor  $\gamma$  er en vej fra et  $z_0$  til  $z$ .

### 3 Cauchys integralformel

**Sætning 3.1** (Cauchys integralsætning). Lad  $f$  være holomorf på et enkelt-sammenhængende område  $G$  og lad  $\gamma$  være en lukket vej i  $G$ . Så er

$$\int_{\gamma} f = 0$$

**Sætning 3.2** (Cauchys integralformel). Lad  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  være holomorf på en åben mængde  $G$  og antag  $K(a, r) \subseteq G$ . For alle  $z_0 \in K(a, r)$  gælder

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta K(a, r)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

idet cirklen gennemløbes en gang mod uret.

**Eksempel 3.3** (Eksempel 3.11, s. 52). viser hvordan man kan vise nogle integralformler ved at integrerer rundt om en firkant. Husk den!

### 4 Anvendelse af Cauchys integralformel

**Sætning 4.1** (Weierstrass' majorantrække sætning). Lad  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$  være en uendelig række af funktioner fra  $M$  til  $\mathbb{C}$ . Antag der findes en konvergent række  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  så

$$\forall n \in \mathbb{N} \forall x \in M : |f_n(x)| \leq a_n$$

Så er  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$  uniformt konvergent på  $M$ .

**Sætning 4.2** (Taylor rækker). *Lad  $f$  være holomorf på  $G$ . Så er  $f$  vilkårligt ofte differentiabel, og har en Taylorrække i  $K(a, \rho) \subseteq G$*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n \quad \text{for } f \in K(a, \rho)$$

Og for  $\overline{K(a, r)} \subseteq G$  og  $z_0 \in K(a, r)$  gælder

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\delta K(a, r)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$$

**Sætning 4.3** (Picards sætning). *En ikke konstant hel funktion har enten billede  $\mathbb{C}$  eller  $\mathbb{C} \setminus \{a\}$  for et  $a \in \mathbb{C}$ . For en hel funktion der ikke er et polynomium, er Urbilledet af et punkt en uendelig mængde for alle punkter på hær højst eet.*

**Sætning 4.4** (Liouilles sætning). *En begrænset hel funktion er konstant*

## 5 Argument. Logaritme. Potens.

**Definition 5.1** (Fortætningspunkt). *Lad  $A \subseteq \mathbb{C}$ . Et punkt  $a \in \mathbb{C}$  kaldes et fortætningspunkt for  $A$ , hvis*

$$\forall r > 0 : K'(a, r) \cap A \neq \emptyset$$

En delmængde kaldes diskret hvis den ikke har nogen fortætnings punkter.

**Sætning 5.2** (Diskret billede). *Lad  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  være kontinuert på en kurvesammenhængende mængde  $A$ . Hvis  $f(A)$  er diskret i  $\mathbb{C}$ , må  $f$  være konstant.*

**Definition 5.3** (Argumentfunktion). *En argumentfunktion på en mængde  $A \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$  forstås  $\theta : A \rightarrow \mathbb{R}$  så  $\theta(z) \in \arg(z)$  for alle  $z \in A$ . Hovedargumentet  $Arg(z)$  er det argument der ligger i  $] -\pi$  og  $\pi]$ . Hovedargumentet er kontinuert på  $C_\pi := \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{R} : z \leq 0\}$ . For  $r = |z|$  gælder*

$$\begin{aligned} Arg(z) &= \operatorname{Arccos} \frac{x}{r} & y > 0 \\ Arg(z) &= \operatorname{Arctan} \frac{y}{x} & x > 0 \\ Arg(z) &= -\operatorname{Arccos} \frac{x}{r} & y < 0 \end{aligned}$$

Man kan 'skære planen op' andre steder end  $\pi$ , se side 81 for dette. Man kan ofte finde kontinuerte argumentfunktioner.

**Definition 5.4** (Logaritmfunktion). Vi definerer logaritmen til

$$\log z = \log |z| + i \arg z$$

og hovedlogaritmen

$$\text{Log} z = \log |z| + i \text{Arg} z$$

**Sætning 5.5.** For et område  $G$  er følgende ensbetydende

1.  $G$  er enkeltssammenhængende.
2. Enhver holomorf funktion på  $G$  har integrale 0 langs en lukket vej.
3. Enhver holomorf funktion på  $G$  har en stamfunktion.
4. Enhver nulpunktsfri holomorf funktion på  $G$  har en holomorf logaritme.
5. Enhver nulpunktsfri holomorf funktion på  $G$  har en holomorf kvadrantfod.

**Sætning 5.6.** Lad  $G$  være et enkeltssammenhængende område  $\neq \mathbb{C}$ . Så findes en bijektiv holomorf funktion  $\phi : G \rightarrow K(0, 1)$ .

**Definition 5.7** (Omløbestal). Lad  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$  være en kontinuert kurve. Så er

$$\text{argvar}(\gamma) := \theta(b) - \theta(a)$$

for en vilkærlig argumentfunktion  $\theta$ . Omløbstallet om nul er for en lukket krue defineret ved

$$\omega(\gamma, 0) := \frac{1}{2\pi} \text{argvar}(\gamma)$$

Omløbstallet om et punkt  $z$  er så givet ved  $\omega(\gamma, z) = \omega(\gamma - z, 0)$ .

**Sætning 5.8.** Lad  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$  være en vej. Så er

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = \log \left| \frac{\gamma(a)}{\gamma(b)} \right| + i \text{argvar}(\gamma)$$

Hvis  $\gamma$  er lukket er

$$\omega(\gamma, 0) := \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{1}{z} dz$$

## 6 Nulpunkter og isolerede singulariteter

**Sætning 6.1.** Lad  $f \in H(G)$  for et område  $G$ , og antag  $f$  ej er identisk 0. Hvis  $a \in G$  er et nulpunkt for  $f$ , så findes et entydigt naturligt tal  $n$  og en entydig funktion  $g \in H(G)$  med  $g(a) \neq 0$  så

$$f(z) = (z - a)^n g(z) \quad z \in G$$

$n$  er nulpunktets multiplicitet. En alternativ karakterisation af  $n$  er

$$f(a) = f'(a) = f''(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0, \quad f^{(n)}(a) \neq 0$$

**Sætning 6.2** (Nulpunkter er isolerede). Lad  $f \in H(G)$  hvor  $G$  er et område, og antag  $f$  ej identisk 0. For ethvert nulpunkt  $a$  findes  $r > 0$  så  $f(z) \neq 0$  for  $z \in K'(a, r) = K(a, r) \setminus \{a\}$ . Mængden af nulpunkter  $Z(f)$  er diskret.

**Sætning 6.3** (Identitetssætningen for holomorfe funktioner). Hvis to holomorfe funktioner  $f, g$  i et område  $G$  stemmer overens på  $A \subseteq G$ , hvor  $A$  har et fortætningspunkt, så er  $f = g$  på  $G$ .

**Definition 6.4** (Isoleret singularitet). Lad  $G \subseteq \mathbb{C}$  være et område og lad  $a \in G$ . Hvis  $f \in H(G \setminus \{a\})$  kaldes  $a$  en isoleret singularitet. Hvis  $a$  kan tillægges en værdi så  $f$  bliver holomorf i  $G$  kaldes  $a$  hævelig.

**Sætning 6.5.** Antag at  $f \in H(G \setminus \{a\})$  og at  $f$  er begrænset i  $K'(a, r)$  for et  $r > 0$ . Så har  $f$  en hævelig singularitet i  $a$ .

**Definition 6.6** (Pol). En isoleret singularitet  $a$  kaldes en pol af orden  $m \in \mathbb{N}$  for  $f$  hvis  $(z - a)^m f(z)$  har en grænseværdi for  $z \rightarrow a$  og denne grænse er forskellig fra 0. En pol af orden 1 kaldes simpel.

**Definition 6.7** (Væsentlig pol). En isoleret singularitet der hverken er hævelig eller en pol kaldes væsentlig.

**Sætning 6.8** (Casorati-Weierstrass' sætning). Hvis  $f \in H(G \setminus \{a\})$  har en væsentlig singularitet i  $a$ , så er  $f(K'(a, r))$  overalt tæt i  $\mathbb{C}$  for alle  $r > 0$  så  $K(a, r) \subseteq G$ .

**Definition 6.9** (Meromorf funktion). Hvis en funktion  $f$  kun har isolerede singulariteter der er enten poler eller hævelige, kalder vi den meromorf, og tillægger den værdien  $\infty$  i polerne. Den skal ydermere opfylde

- $P = \{z \in G \mid f(z) = \infty\}$  er diskret i  $G$ .
- Restriktionen  $f|_{G \setminus P}$  er holomorf.
- Ethvert punkt  $a \in P$  er pol for  $f|_{G \setminus P}$ .

Se ydermere kapitel 6.4.

**Sætning 6.10** (Laurantrække). Lad  $f$  være holomorf i  $G = \{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z - a| < R_2\}$  hvor  $0 \leq R_1 < R \leq \infty$ . Så fremstilles  $f$  i  $G$  som en entydigt bestemt Laurantrække

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - a)^n$$

hvor koefficienterne er givet ved

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta K(a,r)} \frac{f(z)}{(z - a)^{n+1}} dz$$

hvor  $R_1 < r < R_2$ . Vi definerer også  $f_i \in H(K(a, \rho))$  for en laurantrække for  $f$

$$f_i(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n$$

og tilsvarende  $f_e \in H(\mathbb{C} \setminus \{a\})$

$$f_e(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - a)^n}$$

$f_e$  kaldes den principiale del af  $f$ .

**Sætning 6.11** (Singularitet mht Laurantrække). Den isolerede singularitet  $a$  for  $f \in H(G \setminus \{a\})$  med Laurantrække givet som ovenfor er

1. hævelig, hvis og kun hvis  $c_n = 0$  for  $n < 0$ .
2. en pol, hvis og kun hvis  $c_n = 0$  for alle  $n < 0$  på nær endelig mange. Polens orden er det største  $m > 0$  så  $c_{-m} \neq 0$ .
3. en væsentlig singularitet, hvis og kun hvis  $c_n \neq 0$  for uendelig mange  $n < 0$ .

## 7 Residuer og deres anvendelse

**Definition 7.1** (Residue). Lad  $f \in H(G \setminus \{a\})$  have en isoleret singularitet i  $a$  med Laurantrækken

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - a)^n$$

Så kaldes  $c_{-1}$  for residuet af  $f$  i punktet  $a$  og skrives  $Res(f, a)$ , dvs

$$Res(f, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta K(a,r)} f(z) dz$$

for  $0 < r < \rho$  hvor  $K(a, \rho)$  er den største cirkelskive i  $G$  med centrum  $a$ . Vi kan erstatte cirklen  $\delta K(a, r)$  med andre simple lukkede veje, der løber en gang rundt om  $a$  i positiv omløbsretning.

**Proposition 7.2.** *Man kan finde udregne esiduer pæ følgende måde, når  $h$  er meromorf*

1. *Antag at  $h$  har en simpel pol i  $a$ . Så er*

$$\operatorname{Res}(h, a) = \lim_{z \rightarrow a} (z - a)h(z)$$

2. *Antag at  $h = f/g$  er meromorf med en simpel pol i  $a$  og at  $f(a) \neq 0$ ,  $g(a) = 0$  og  $g'(a) \neq 0$ . Så er*

$$\operatorname{Res}(h, a) = \frac{f(a)}{g'(a)}$$

3. *Antag at  $h$  har en pol af orden  $m \geq 1$  i  $a$ . Sæt  $\phi(z) = (z - a)^m h(z)$  er*

$$\operatorname{Res}(h, a) = \frac{\phi^{(m-1)}(a)}{(m-1)!}$$

**Sætning 7.3** (Cauchys residuesætning). *Lad  $G$  være et enkeltsammenhængende område, og lad  $P = \{a_1, \dots, a_n\} \subseteq G$ . Lad  $\gamma$  være en simpel lukket vej i  $G$  som omslutter  $a_1, \dots, a_n$  og som gennemløbes een gang med positiv orientering. For  $f \in H(G \setminus P)$  gælder så*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^n \operatorname{Res}(f, a_j)$$

**Sætning 7.4** (Antal poler og nulpunkter for en meromorf funktion). *Lad  $h : G \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  være meromorf i et enkeltsammenhængende område  $G$ , og lad  $\gamma$  være en positivt orienteret simpel lukket vej i  $G$ , der ikke går igennem nogen af  $h$ 's nulpunkter og poler. Så er*

$$N - P = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{h'(z)}{h(z)} dz$$

*Hvor  $N$  er antallet af nulpunkter og  $P$  er antallet af poler, begge talt med orden.*

**Bemærkning 7.5** (Argumentprincippet). *Lad  $\Gamma = h \circ \gamma$ . Bemærk at  $\Gamma$  forløber i  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Hvis  $\gamma$  er defineret på  $[a, b]$  er*

$$N - P = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{h'(z)}{h(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{1}{z} dz = \omega(\Gamma, 0)$$

eller tilsvarende

$$2\pi(N - P) = \operatorname{argvar}(\Gamma)$$

**Sætning 7.6** (Rouches sætning). Lad  $f, g \in H(G)$  hvor  $G$  er et enkelt-sammenhængende område. Lad  $\gamma$  være en simpel lukket vej i  $G$  og antag at

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)|, \quad z \in \gamma^*$$

Så har  $f$  og  $g$  samme antal nulpunkter talt med multiplicitet i det område som  $\gamma$  omslutter.

*Bemærkning 7.7* (Bestemt integraler). Hvis vi vil udregne et integrale på formen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 1)^2} dx$$

eller lignende, så se eksempel 7.7.

**Sætning 7.8.** Lad  $f$  være en rational funktion

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{a_0 + a_1z + \dots + a_mz^m}{b_0 + b_1z \dots b_nz^n}$$

og antag at  $n \geq m + 2$  og at  $f$  ikke har nogen poler på den reelle akse. Så er

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^k \text{Res}(f, z_j)$$

hvor  $z_1, \dots, z_k$  er polerne i det øvre halvplan. Hvis  $z_1, \dots, z_k$  er polerne i det nedre halvplan er

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(z) dz = -2\pi i \sum_{j=1}^k \text{Res}(f, z_j)$$

**Sætning 7.9.** Lad  $f$  være meromorf i  $\mathbb{C}$  og uden poler på den reelle akse og med kun endeligt mange poler  $z_1, \dots, z_k$  i det øvre halvplan. Hvis

$$\max_{0 \leq t \leq \pi} |f(Re^{it})| \rightarrow 0 \text{ for } R \rightarrow \infty$$

så vil

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\lambda x} dx = 2\pi i \sum_{j=1}^k \text{Res}(f(z)e^{i\lambda z}, z_j), \quad \lambda > 0$$

**Sætning 7.10.** Hvis en funktion er på formen  $f(\cos t, \sin t)$  gælder

$$\int_0^{2\pi} f(\cos t, \sin t) = \int_{\delta K(0,1)} f\left(\frac{1}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right) \frac{1}{iz} dz$$



## 8 Nogle regneregler

$$\frac{1}{(z-a)(z-b)} = \frac{1}{a-b} \left( \frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-b} \right)$$

$$||w| - |u|| \leq |w - u|$$

$$|x - y| \leq |z| \iff |x - w| \leq |z| + |w - y|$$