Lidt om antal forskellige slag med to terninger

Jonas Lindstrøm Jensen (mail@jonaslindstrom.dk)

April 2009

Resumé

Jeg vil i denne artikel tage udgangspunkt i at tælle antallet af forskellige slag, når man slår et slag med to almindelige terninger. Dette generaliserer helt naturligt til at slå et slag med n terninger, der hver kan antage k forskellige værdier. Dette beskrives i kapitel 1, der kan læses af alle, der har haft matematik i gymnasiet.

I kapitel 2 tæller vi endnu engang antallet forskellige slag, men denne gang på en lidt anden måde, der involverer ordnede partitioner. Dette giver nogle formler for sammenhængen mellem antallet af delmængder af en mængde og antallet af ordnede paritioner af en mængden.

1 Et slag med to terninger

Husk på, at binomialkoefficienten $\binom{n}{k}$ betegner, hvor mange forskellige delmængder med k elementer, man kan finde i en mængde med n elementer, og at

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

hvor $n! = 1 \cdot 2 \cdots (n-1) \cdot n$.

Jeg påstår, at der er $\binom{7}{5} = 21$ forskellige udfald af et slag med to terninger. Lad os repræsentere hver 5-delmængde af 7-mængden således: Vi lader $x_1, \ldots, x_5$ betegne de elementer, der er i delmængden, og O'er betegne dem, der ikke er i delmængden. Dvs delmængden $1, 2, 4, 5, 7 \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ skriver vi som

$$x_1 x_2 O x_3 x_4 O x_5$$

Jeg påstår nu, at hvert slag med to terninger, svarer til sådan en delmængde, og omvendt. Denne delmængde svarer til slaget $(3, 5)$ idet vi lader antallet af O'er før x_1 være antallet af 1'ere i slaget, antallet af O'er mellem x_1 og x_2 er antallet af 2'ere i slaget osv. Så vi ser ovenfor, at der er et O mellem x_2 og x_3, så derfor er der netop én 3'er, og der er et O mellem x_4 og x_5, så der er netop én 5'er.

Tilsvarende kan man givet et slag, fx $(1, 4)$, konstruere en 5-delmængde af en 7-mængde, i dette tilfælde

$$O x_1 x_2 x_3 O x_5.$$

Så for at tælle antallet af forskellige slag med to terninger, kan vi istedet tælle antallet af 5-delmængder af en 7-mængde, og det er præcis $\binom{7}{5} = 21$.

På tilsvarende vis er der, hvis man slår n terninger, der hver kan have k forskellige værdier, i alt $\binom{n+k-1}{k-1}$ forskellige slag.

2 Ordnede partioner

Et klassisk kombinatorisk trick er, at tælle det samme på to forskellige måder, og på den måde udlede nye formler. Så vi vil nu forsøge at tælle antallet af forskellige slag, hvis man slår n terninger, der kan have k forskellige værdier.

Vi lader $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$. For $k, n \in \mathbb{N}, k \geq 1$ definerer vi

$$p_k(n) = \{(x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{N}^k \mid x_1 + \cdots + x_k = n\}.$$

Så $p_k(n)$ er altså antallet af ordnede partioner af en n-mængde, hvor den tomme mængde kan indgå i partitionen. Fx er $p_2(3) = 4$ da

$$3 = 3 + 0 = 0 + 3 = 2 + 1 = 1 + 2.$$

Vi ser at $p_1(n) = 1$ for alle $n \in \mathbb{N}$ og $p_k(0) = 1$ for alle $k \geq 1$, samt at

$$p_k(n) = \sum_{i=0}^{n} p_{k-1}(n-i).$$

Ud fra denne formel kan vi udregne $p_k(n)$ rekursivt.

Hvorfor har vi så lyst til at undersøge disse tal? Ja, det er fordi jeg påstår, at antallet af forskellige slag med to terninger kan bestemmes som $p_6(2) = 21$. For hver partition $(x_1, \ldots, x_6)$ med $x_1 + \cdots + x_6 = 2$ svarer til et terningslag på oplagt manér, idet x_j angiver antal j'ere. Fx er $(0, 1, 0, 0, 1, 0)$ slaget $(2, 5)$ og $(0, 0, 2, 0, 0, 0)$ er $(3, 3)$.

Helt generelt gælder, at hvis man slår n terninger, der hver kan antage k forskellige værdier, så kan man slå $p_k(n)$ forskellige slag.

Så jævnfør argumentet i kapitel 1, har vi altså

$$p_k(n) = \binom{n+k-1}{k-1},$$

og

$$\binom{p}{q} = p_{q+1}(p-q).$$

hvis $p > q$. Vi har desuden den rekurssive formel

$$\binom{n+k-1}{k-1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n-i+k-2}{k-2}$$

eller tilsvarende

$$\binom{p}{q} = \sum_{i=0}^{p-q} \binom{p-i-1}{q-1}.$$